10 ЛЕКЦИЯ **ҚАТТЫ ДЕНЕ ДИНАМИКАСЫ**

Бұл дәрісте біз қатты дене қозғалысының әртүрлі аспектілерін, соның ішінде оның кинематикасын (күштерді есепке алмай қозғалысты сипаттау), динамиканы (күштер мен моменттердің өзара әрекеттесуі), сонымен қатар осыған байланысты негізгі заңдары мен принциптерді қарастырамыз. Біз масса, инерция, инерция моменті, күш моменті, бұрыштық жылдамдық және үдеу сияқты ұғымдарды, сондай-ақ қатты дененің қозғалыс теңдеулерін қарастырамыз. Бұрыштық импульстің өзгеруі туралы теорема және кинетикалық энергияның өзгеруі туралы негізгі теоремалар да қарастырылады.

Абсолют қатты дене, еркіндік дәрежелері және координаттары. Эйлер бұрыштары. Абсолют қатты дененің механикасы екі сатыдан: кинематика және динамикадан тұрады. Абсолют қатты дененің кинематикасы дененің қозғалысын осы дененің әрбір нүктелерінің өзара арақашықтықтары өзгермейтіндей етіп қарастырады, яғни дененің пішіні мен өлшемі қозғалысты қарастырғанда ешқандай рөл атқармайды және дене *тұтас орта* ретінде қарастырылады.

Қатты дененің кеңістіктегі орнын анықтау үшін оның полюсімен және осьтерінің бағыттары ζ,η,θ-ны қозғалмайтын OXYZ санақ жүйесімен байланыстырамыз. O_1 полюсінің орны $\vec{r}_0$ -радиус векторымен анықталады:

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z \qquad (1)$$

$\alpha_{11},..\alpha_{33}$ – $e_\zeta, e_\eta, e_\theta$ – қозғалыстағы осьтің және e_x, e_y, e_z –қозғалмайтын осьтердің арасындағы бұрыштың косинустары. α_{ik} – тоғыз мәні бар орттардың ортогональдық шарттарды қолдансақ, олардың арасындағы байланысты былай табуға болады:

$$\cos\alpha_{\zeta\eta} = (e_\zeta, e_\eta) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} * \alpha_{i2} = 0 \qquad (e_\zeta, e_\zeta) = 1$$

$$\cos\alpha_{\zeta\theta} = (e_\zeta, e_\theta) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} * \alpha_{i3} = 0 \qquad (e_\eta, e_\eta) = 1$$

$$\cos\alpha_{\eta\theta} = (e_\eta, e_\theta) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} * \alpha_{i3} = 0 \qquad (e_\theta, e_\theta) = 1$$

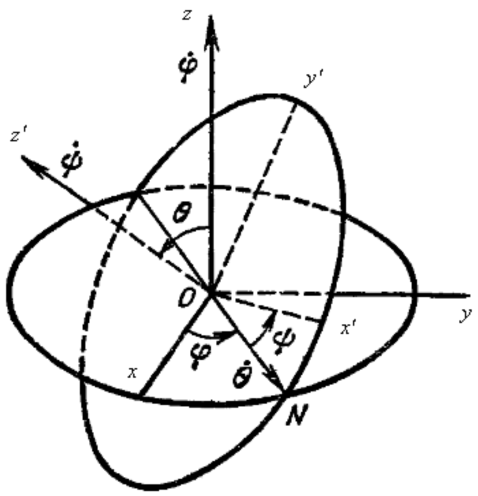
ал енді үш өзара байланысы 1-ге тең болады

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{is} = \delta_{ks} = \begin{cases} 1, k = s \\ 0, k \neq s \end{cases} \qquad (2)$$

Сонымен қозғалыстағы осьті қозғалмайтын оське қатысты анықтайтын α_{ik} тоғыз мәнді шамасы алты шаманың мәнімен анықталады. Қатты дененің кеңістіктегі қозғалыс бағытын үш тәуелсіз параметрлермен анықтайды. Осы шамаларды *абсолют қатты дененің айналуы еркіндік дәрежесі* деп атайды.

Қатты дененің қозғалысы оның инерция центрінің үш координаттары x', y', z' - тің қозғалмайтын x,y,z жүйесіне қатысты айналуын сипаттайтын үш бұрыштармен анықталатыны жоғарыда айтылды. Осы аталған бұрыштарды *Эйлер бұрыштары* деп атау көп жағдайда ыңғайлы болып табылады.

Қазіргі жағдайда бізді тек осьтердің өзара бір-біріне қатысты бұрыштары қызықтыратындықтан, екі жүйенің де басын бір нүктеде қарастырамыз.



Сурет 37.

ON-түзуін – түйіндер сызығы деп атайды, яғни бұл түзу қозғалыстағы $x'y'$ жазықтығы қозғалмайтын xy жазықтығын қиып түсіреді. Бұл сызық z осіне және z' осіне де перпендикуляр. Оның оң бағытын $[\bar{z}\bar{z}']$ векторлық көбейтіндінің бағытымен сәйкес аламыз. $\bar{z}, \bar{z}' - z$ және $\vec{z}'$ осьтерінің орттары.

x', y', z' осьтерінің x,y,z осьтеріне қатысты орнын анықтайтын шамалар ретінде мынадай бұрыштарды аламы: z және $\vec{z}'$ осьтерінің арасындағы – θ бұрышы; x және N осьтерінің арасындағы – φ бұрышы; N және x´ осьтерінің арасындағы – ψ бұрышы. φ және ψ бұрыштарын винт ережесі бойынша сәйкесінше z және z´осьтерінің маңында бұрылуы бағытын аламыз. Олардың мәндері $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \psi \le 2\pi$ болады.

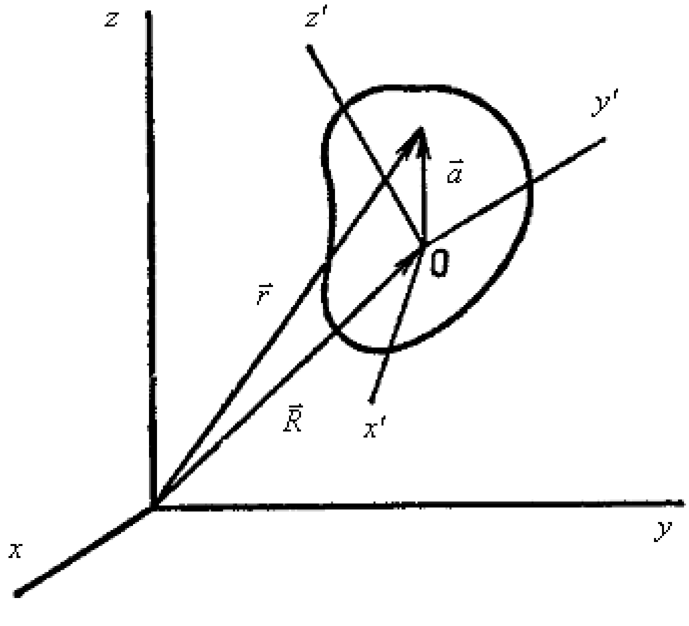
Бұрыштық жылдамдық, оның қозғалыстағы санақ жүйесі өстеріне проекциялары. Бұрыштық жылдамдық объект бағыты мен кейбір қозғалмайтын ось немесе жазықтық арасындағы бұрыштың өзгеруінің жылдамдығын анықтайды. Бұл тақырыпта осы екі мәселе қарастырылады: бұрыштық жылдамдық және толық бұрыштық жылдамдықтың қозғалатын тірек жүйесінің осьтеріндегі проекциялары, сонымен қатар осы ұғымдардың мысалдары мен кейбір практикалық қолданулары енгізіледі.

Бұрыштық жылдамдық пен толық бұрыштық жылдамдықтың қозғалатын санақ жүйесінің осьтеріндегі проекцияларын білу теориялық механикада айналмалы заттардың қозғалысын тереңірек түсінуге және талдауға мүмкіндік береді. Қатты дене нүктелік массалардан тұратын болса оның массасы: $m = \sum_i m_i$; ал егер тұтас ретінде қарастырсақ: $m = \int_V \rho dV$; ρ-тұтас дене үшін уақыт пен координаттың функциясы $\rho = \rho(r,t)$ болып табылады.

Қатты дененің қозғалысын түсіндіру үшін екі координаталар жүйесін қолданамыз: XYZ – “қозғалмайтын”, яғни инерциалды санақ жүйесін және қатты дененің барлық қозғалысына қатысатын, сонымен қатар онымен тығыз бекітілген қозғалыстағы санақ жүйесін енгіземіз.

Қозғалыстағы санақ жүйесінің басы О нүктесіне бекітілген, яғни дененің инерция центрінде орналасқан. $\vec{R}$ – радиус-векторы қозғалыстағы санақ жүйесі О-ның орнын көрсетеді. Осы осьтің өзгеру бағыты қозғалмайтын оське қатысты үш тәуелсіз бұрыштармен және $\vec{R}$ –векторының үш құраушыларымен, яғни барлығы алты координатамен анықталады. Сонымен қатты дене *алты еркіндік дәрежесі бар* механикалық жүйе болып табылады.

Қатты дененің шексіз аз орын ауыстыруын қарастырамыз. Бұл қозғалысты екі түрлі қозғалыстың қосындысы ретінде түсіндіруге болады. Біріншіден, дененің шексіз аз параллель орын ауыстыруы. Бұл жағдайда инерция центрі орын ауыстырудың бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейін қозғалмайтын оське қатысты бағытын өзгертпейді. Екіншісі инерция центрінің маңында қатты дене шексіз аз бұрылады.



Сурет 39.

Қатты дененің кез-келген бір нүктесін алып, оның қозғалмайтын оське қатысты радиус-векторын $\vec{r}$-деп белгілесек, дәл осы нүктенің қозғалыстағы оське қатысты радиус-векторын $\vec{a}$-деп аламыз. Сонда $d\vec{a}$ - шексіз аз орын ауыстыруы

$$d\vec{a} = d\vec{R} + \left[d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}\right] \tag{3}$$

мұндағы $d\vec{R}$-берілген нүктенің инерция центрін қоса параллель орын ауыстыруы және $[d\vec{\varphi}\cdot\vec{r}]$ – d$\vec{\varphi}$ шексіз аз бұрышқа бұрылғандағы орын ауыстыруы. Осы шамаларды dt-ға бөлгенде

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{v},\ \frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{V},\ \frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\Omega}. \tag{4}$$

Мынадай өрнекті аламыз

$$\vec{v}=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{5}$$

$\vec{V}$ – қатты дененің инерция центрінің жылдамдығы немесе оны қатты дененің ілгермелі қозғалысының жылдамдығы десе де болады. $\vec{\Omega}$-қатты дененің айналу *бұрыштық жылдамдығы* деп аталады, оның бағыты айналу осінің бағытымен бағыттас. Сонымен қатты дененің кез-келген нүктесінің жылдамдығы (қозғалмайтын оське қатысты) дененің ілгермелі қозғалысы және оның айналуының бұрыштық жылдамдығы арқылы өрнектеледі.

Енді мынадай жағдайды қарастырайық: қатты денемен тығыз байланысқан O – координата жүйесі осы қатты дененің инерция центрінде емес O – нүктесінен b – қашықтықта орналасқан O' нүктесінде болсын. O' жүйесінің орын ауыстыру жылдамдығы $\mathbf{V}'$**,** ал оның айналуының бұрыштық жылдамдығы $\vec{\Omega}'$ болады.

Тағы да қатты дененің бойынан кез-келген бір P – нүктесін аламыз. Оның O' осіне қатысты радиус-векторын $\vec{r}\,'$ деп алсақ: $\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{b}$ болады. Осыны (2)-ге қоямыз. Сонда:

$$\vec{v}=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{b}\right]+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\,'\right] \tag{6}$$

Ал бір жағынан **V** және $\vec{\Omega}'$ анықтамасы бойынша $\vec{v}=\vec{V}'+\left[\vec{\Omega}'\vec{r}\,'\right]$ болу керек еді.

$$\vec{V}'=\vec{v}-\left[\vec{\Omega}'\vec{r}\,'\right];\quad \vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{b}\right]+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\,'\right]-\left[\vec{\Omega}'\vec{r}\,'\right]=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{b}\right] \tag{7}$$

немесе $\vec{\Omega}'=\vec{\Omega}$ болады, яғни бұл өрнектің физикалық маңызы зор, яғни қатты денені тұтас дене ретінде алғанда оның әрбір нүктесінің бұрыштық жылдамдықтары бірдей болады. Қозғалыстағы санақ жүйесіне тығыз байланысқан координата жүйесінде әрбір уақыт моментінде осы жүйенің айналуының бұрыштық жылдамдығы жүйеге тәуелді емес. (5) формуладан $\vec{v}$ барлық нүктелердің жылдамдықтары бір жазықтықта жатыр және бұл жазықтық $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдыққа перпендикуляр. Сондықтан кез-келген уақытта O' санақ жүйесін V' жылдамдығы ноль болатындай етіп таңдап алуға болады. Осы жағдайда қатты дененің қозғалысы тек осы O' осінің маңындағы айналуы (айналмалы қозғалысы) болып табылады. Осындай осьті дененің *лездік айналу осі* деп атайды.

Осыдан ары қарай біз қозғалыстағы координата жүйесінің басы ретінде дененің инерция центрін аламыз және дененің айналуы да осы центр арқылы болады. Дененің қозғалысы кезінде $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықтың бағыты да абсолют мәні де өзгереді деп есептеуге болады.

Енді $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдық векторының x', y', z' қозғалыстағы осьтеріне қатысты құраушыларын *Эйлер бұрыштары* және олардың туындылары арқылы өрнектейміз. Ол үшін осы осьтерге $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\Psi}$ бұрыштық жылдамдықтарын проекциялаймыз. $\dot{\theta}$ бұрыштық жылдамдығы ON түйін сызығы арқылы бағытталған және оның x′,y′,z′ осьтеріндегі құраушылары:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi\,,\ \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi\,,\ \dot{\theta}_3 = 0 \tag{8}$$

Мұндағы $\dot{\varphi}$ бұрыштық жылдамдығы z осінің бойымен бағытталған.

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\,,\quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\,,\quad \dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \tag{9}$$

$\dot{\psi}$ бұрыштық жылдамдығы z′ осімен бағытталған. Осыларды әрбір осьтің құраушылары арқылы біріктіріп:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\,,\quad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\,,\quad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{10}$$

Егер x', y', z' осьтері қатты дененің бас инерция осьтері арқылы алынған болса Эйлер бұрыштары арқылы өрнектелген айналмалы кинетикалық энергиясын есептеу үшін:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega^2{}_1 + I_2\Omega^2{}_2 + I_3\Omega^2{}_3\right) \tag{11}$$

пайдаланып, $I_1 = I_2 \neq I_3$ болатын симметриялы ұршық үшін :

$$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \tag{14}$$

Симметриялы ұршықтың x', y' бас инерция осьтерінің бағытын қалауымызша алуға болатынын пайдалансақ, x' осі ON түйін осімен бірдей болады да ψ=0 тең болады. Осыдан бұрыштық жылдамдықтың құраушылары:

$$\Omega_1 = \dot{\theta}\,,\quad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\,,\quad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{15}$$

Эйлер бұрыштарына арналған өрнектердің көмегімен симметриялы ұршықтың еркін қозғалысын өрнектеуге қолдануға болады.

Ұршықтың тұрақты $\vec{M}$ моментінің бағытымен қозғалмайтын координаттар жүйесінің z осін бағыттас етіп аламыз. Z′ қозғалыстағы жүйенің осі ұршықтың айналу осімен сәйкес, ал x' осі осы берілген уақыт моментінде түйіндер осімен бірдей болсын. Сонда $\vec{M}$ векторының құраушылары формуланың көмегімен:

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}_1, \quad M_2 = I_2\Omega_1 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta, \quad M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (16)$$

Бір жағынан x' осі (түйіндер сызығы) z осіне перпендикуляр болғандықтан:

$$M_1 = 0,\ M_2 = M\sin\theta,\ M_3 = M\cos\theta. \qquad (17)$$

(13) мен (14) теңестіріп:

$$I_1\dot{\theta} = 0,\ M = I_1\dot{\varphi},\ M\cos\theta = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (18)$$

Осыдан

$$\dot{\theta} = 0,\ M = I_1\dot{\varphi},\ M\cos\theta = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (19)$$

Біріншіден θ=const болады. Ұршықтың осінің $\vec{M}$ байланысы бұрышы тұрақты болады.

$\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}$ прецессияның бұрыштық жылдамдығы, $\Omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3}$ ұршықтың өз осінен айналуының бұрыштық жылдамдығы.

Абсолютті қатты дененің инерция тензоры. Инерцияның бас өстері. Инерция тензоры айналу осі айналасындағы массаның таралуын анықтайды және айналу қозғалысы кезінде дененің әрекетін сипаттауға мүмкіндік береді. Бұл тақырыпта екі мәселе қарастырылады: абсалют қатты дененің инерция тензоры және инерцияның бас осьтері.

Қатты дененің кинетикалық энергиясын есептегенде оны дискретті материалдық нүктелер жиыны ретінде қарастырамыз.

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \qquad (20)$$

Мұндағы $\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$, болғандықтан, кинетикалық энергия инерция центріне шоғырланған дененің бүкіл массасының кинетикалық энергиясынан және дененің әрбір бөлшегінің салыстырмалы қозғалыстарының кинетикалық энергиясынан тұрады. Қатты дене жағдайында бөлшектердің салыстырмалық қозғалысы дегені барлық бөлшектердің бірдей бұрыштық жылдамдықпен $\vec{\Omega}$ инерция центрінің маңында айналуын көрсетеді.

Қатты дененің айналу кинетикалық энергиясын жазамыз. Дененің тығыздығы ρ бүкіл денеде әр түрлі болып таралуы мүмкін. $\rho=\rho$ (x,y,z)= ρ (r), яғни координатаға тәуелді болады. dV – көлемнің элементар массасы

$$dm=\rho dV,$$

ал айналмалы жылдамдығы $\vec{v}=\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$, сондықтан кинетикалық энергия:

$$T=\frac{1}{2}\int\rho\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 dV \tag{21}$$

$$\begin{gathered}T=\frac{1}{2}\Omega_x^2\int\rho\left(y^2+z^2\right)dV+\frac{1}{2}\Omega_y^2\int\rho\left(x^2+z^2\right)dV+\frac{1}{2}\Omega_z^2\int\rho\left(y^2+x^2\right)dV-\\-\Omega_x\Omega_y\int\rho xydV-\Omega_x\Omega_z\int\rho xzdV-\Omega_z\Omega_y\int\rho zydV\end{gathered} \tag{22}$$

Осы өрнектегі интегралдар қатты дененің формасы мен тығыздықтың таралуына тәуелді, ал қозғалысқа әсер етпейді. Сондықтан оларды былай белгілеп қоямыз:

$$J_{xx}=\int\rho\,(z^2+y^2)dV,\ J_{xy}=-\int\rho xydV, \tag{23}$$

$$J_{yy}=\int\rho\,(x^2+z^2)dV,\quad J_{xz}=-\int\rho xzdV, \tag{24}$$

$$J_{zz}=\int\rho\,(x^2+y^2)dV,\quad J_{yz}=-\int\rho yzdV. \tag{25}$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – сәйкес оське қатысты алынған *инерция моменттері* деп аталады. $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}-\ I_{ik}$ деп белгілеп оны *инерция моментінің* тензоры немесе жай ғана *инерция тензоры* деп атайды. I_1, I_2, I_3 – бас инерция моменттері деп аталады. Сонымен қатты дененің айналмалы қозғалысының кинетикалық энергиясы:

$$T=\frac{1}{2}\left(I_{xx}\Omega_x^2+I_{yy}\Omega_y^2+I_{zz}\Omega_z^2+2I_{xy}\Omega_x\Omega_y+2I_{xz}\Omega_x\Omega_z+2I_{yz}\Omega_y\Omega_z\right)=\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \tag{26}$$

Ал толық кинетикалық энергиясы:

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \tag{27}$$

Инерция тензоры диагоналдық түрге келетін x', y', z' координаттар жүйесінің осьтері *инерция тензорының бас осьтері* деп аталады. Қатты дененің Лагранж функциясын жазамыз

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U \,. \qquad (28)$$

U – потенциялдық энергиясы қатты дененің кеңістіктегі орнын анықтайтын 6 айнымалының, мысалы, x,y,z координаталары және қозғалыстағы координаттар осінің тыныштықтағы координаттар осьтеріне қатысты айналу бұрыштарының үш мәнінің функциясы болып табылады.

O, x, y, z – координаттар жүйесінде I_{xx}, I_{xy}, I_{yy}, I_{xz}, I_{zz}, I_{yz} мәндері тұрақты болады. Егер осы қатты денемен байланысқан басқа Ox'y'z' координаттар жүйесін алсақ, нүктелердің бұрынғы координаттар жаңа координаттармен белгілі формула арқылы байланысады:

$$x = x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x),$$

$$y = x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y),$$

$$z = x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z).$$

$\cos\left(x_i^{/}, x_k\right) = A_{ik}$ белгілеу енгізіп, қосу ережесін қолдансақ

$$x_k = x_i^{/} \cdot A_{ik}, \qquad (29)$$

Сол сияқты Ω_k – ескі координаттар осіне, $\Omega_i^{/}$ – жаңа координаттар осіне қатысты алынған түрлендірулер. Осы түрлендірулерді

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\Omega_x^{/2} + I_{yy}\Omega_y^{/2} + I_{zz}\Omega_z^{/2} + 2I_{xy}\Omega'_x\Omega'_y + 2I_{xz}\Omega'_x\Omega'_z + 2I_{yz}\Omega'_y\Omega'_z\right), \qquad (30)$$

орнына қоямыз. Осы түрлендіру кезінде $\Omega'_x\Omega'_y$, $\Omega'_x\Omega'_z$, $\Omega'_y\Omega'_z$ – нөлге айналатындай түрлендірулер жасауға болады. $\Omega_x^{/2}, \Omega_y^{/2}, \Omega_z^{/2}$ – болғандағы инерциясы арқылы белгілесек

$$\begin{aligned} I_1 &= A_{1i} A_{1k} I_{ik}, \\ I_2 &= A_{2i} A_{2k} I_{ik}, \\ I_3 &= A_{3i} A_{3k} I_{ik}. \end{aligned} \qquad (31)$$

Инерция тензоры диагоналдық түрге келетін x', y', z' – координаттар жүйесінің осьтерін инерция тензорының *бас остері* деп атайды.

Жаңа координаттық осьтер арқылы кинетикалық энергия былай жазылады:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right), \qquad (32)$$

Бас осьтердегі инерция моменттері инерцияның *бас моменттері* деп аталады. Олар I_1, I_2, I_3 – деп белгіленген.

$$I_1 + I_2 \geq \int \rho\left(x'^2 + y'^2\right)dV = I_3, \tag{33}$$

Яғни, үш бас инерция моменттерінің біреуі, қалған моменттердің қосындысынан үлкен болмайды. Осындай қатты денені *жазық ұршық* деп атайды. Бас инерция моменттерінің мәндері әр түрлі болған жағдайда денелер *ассимметриялы ұршық* деп аталады. Егер де бас инерция моменттерінің екеуі бір-біріне тең болса, ол $I_1=I_2\neq I_3$ — *симметриялы ұршық* деп аталады. x', y' – жазықтығында бас осьтердің бағытын қалауымызша ала аламыз. Егер бас инерция моменттерінің үшеуі де бір-біріне сәйкес болса, ол дене *шар ұршық* болады. Бұл жағдайда барлық үш бас инерция осьтерін таңдауымыз бойынша ала аламыз; яғни өзара перпендикуляр кез-келген үш осьті де алуға болады. Бас инерция моментінің екеуі бір-біріне тең $I_1=I_2\Rightarrow I_3=0$, үшіншісі нөлге тең болған жағдайда бұл дене *сызықтық ұршық* немесе *ротатор* болып табылады. Ротатордың тек екі ғана айналу еркіндік дәрежесі бар, яғни тек қана x' және y' осьтерінің маңында айналады, ал түзудің өз маңында айналуы жағдайы қарастырылмайды.

Инерция тензорын есептеудің тағы бір түрін қарастырамыз. Біз осыған дейін инерция тензоры координаттық осьтері инерция центрінде орналасқан дене үшін көрсеттік. Енді осыған ұқсас кез-келген бір O' оське қатысты алынған инерция тензорын есептеп көрелік:

$$I'_{ik} = \sum m\left(x_l'^2\delta_{ik} - x'_i x'_k\right), \tag{34}$$

$\left|\vec{O}\vec{O}'\right| = \vec{a}$ тең болса: $\vec{r}$ – массалар центрі мен осьтің арақашықтығы векторлық түрде: $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$, немесе $x'_i = x_i + a_i$, O нүктесі инерция центрінде орналасқан, яғни

$$\sum m\vec{r} = 0, \ \vec{R} = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m} = 0, \tag{35}$$

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right). \tag{36}$$

Яғни осы формуланы пайдаланып, ізделініп отырған I'_{ik} – тензорын есептеуге болады.

$$I_{ik}^{/} = \sum m\left(x_l^{/2}\delta_{ik} - x_i^{/} x_k^{/}\right) = \begin{vmatrix} \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a} \\ x_i^{/} = x_i + a_i \\ x_k^{/} = x_k + a_k \\ \sum m\vec{r} = 0 \end{vmatrix} = \sum m\left\{x_l^{/2}\delta_{ik} + a_i^{/2}\delta_{ik} + 2a_i x_i \delta_{ik} - (x_i + a_i)(x_k + a_k)\right\} =$$

$$= \sum m\left\{x_i^{/2}\delta_{ik} + a_i^{/2}\delta_{ik} - x_i x_k - x_i a_k - x_k a_i - a_i a_k\right\} = I_{ik} + \mu\left\{a_i^2\delta_{ik} - a_i a_k\right\} \qquad (37)$$

мұндағы $I_{ik} = \sum m\left\{x_l^{/2}\delta_{ik} - x_i x_k\right\}$, ал, $\sum m = \mu$.

Сонымен инерция тензоры қатты дененің массасы мен инерциясының таралуын сипаттау үшін қолданылады екен және ол симметриялы матрицаны бейнелейтін математикалық объект болып табылады. Инерция тензорын дене массасының пішіні мен таралуына байланысты және әртүрлі айналу осіне қатысты инерция моментін анықтау үшін қолдандық.

Қатты дененің импульс моменті. Жүйенің импульс моментінің шамасы оны қай нүктеге қатысты таңдап алғанға байланысты екенін білеміз:

$$\vec{M} = \sum m[\vec{r}\vec{v}]. \qquad (38)$$

Қатты дененің орны қозғалыстағы санақ жүйесінде, яғни инерция центрінде орналасқан

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[\vec{R}\vec{P}\right] \qquad (39)$$

Санақ жүйесінің басы инерция центрінде орналасқан жағдайда дененің моменті $\vec{M}$ «меншікті моментімен» сәйкес болады да $\vec{v} = \vec{V} + \left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$ өрнегіндегі ілгерімелі қозғалысының жылдамдығы ескерілмейді, яғни $\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]$ -арқылы

$$\vec{M} = \sum m\left[\vec{r}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right] = \sum m\left\{r^2\vec{\Omega} - \vec{r}\left(\vec{r}\vec{\Omega}\right)\right\}, \qquad (40)$$

немесе тензорлық белгілеулер арқылы жазатын болсақ:

$$M_i = \sum m\left(x_l^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k\right) = \left|\Omega_i = \Omega_k \delta_{ik}\right| = \Omega_k \sum m\left\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right\}, \ (25.4)$$

мұндағы

$$\sum m\left\{x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right\} = I_{ik}, \qquad (41)$$

яғни инерция тензоры екенін ескерсек:

$$M_i = I_{ik}\Omega_k, \qquad (42)$$

Егерде x', y', z' - бас осьтері дененің бас инерция осьтерімен сәйкес болса:

$$M_1 = I_1\Omega_1,\ \ M_2 = I_2\Omega_2,\ \ M_3 = I_3\Omega_3 \tag{43}$$

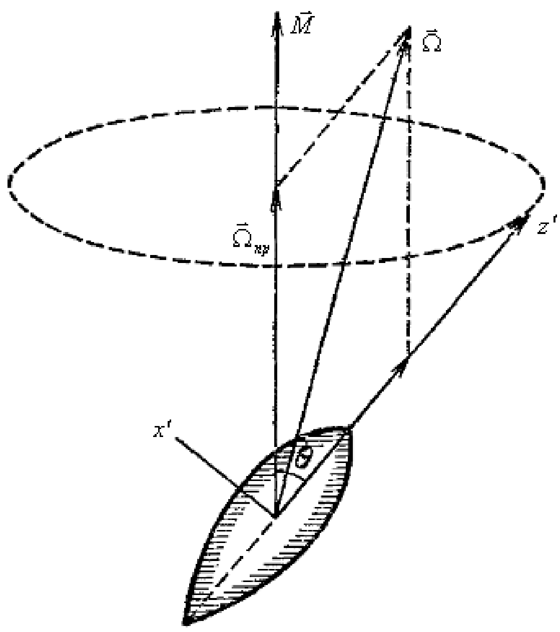
$I_1 = I_2 = I_3 \Rightarrow$ бас инерция моменттері тең болатын шар ұршық үшін

$$\vec{M} = \vec{I}\vec{\Omega}, \tag{44}$$

момент векторы бұрыштық жылдамдыққа пропорционал және онымен бағыттас болады. Сырттан күштер әсер етпейтін және дененің ілгерімелі қозғалысын ескермеуге болатын немесе дененің еркін айналмалы қозғалысын қарастырамыз. Барлық тұйық жүйелер сияқты еркін айналып тұрған дененің импульс моменті тұрақты болады. $I_1 = I_2 = I_3$ болатын шар ұршық үшін $\vec{M}$ =const шарты $\vec{\Omega}$=const шартына әкеліп соғады. Яғни, жалпы жағдайда еркін айналып тұрған шар ұршығы, тұрақты осьті бірқалыпты айналып тұрады.

Сол сияқты ротатор жағдайында $(I_1 = I_2; I_3 = 0)$, $\vec{M} = \vec{I}\vec{\Omega}$ болады, сонымен қатар $\vec{\Omega}$ векторы ротатордың осіне перпендикуляр болады. Сондықтан ротатордың еркін айналуы, осы жазықтыққа перпендикуляр бағыттың маңында бірқалыпты айналуы болып табылады.

x', y' инерцияның бас осьтерін қалауымызша ала-алғандықтан, y' осін $\vec{M}$ тұрақты векторы және z' осінің лездік орнымен сипатталатын жазықтыққа перпендикуляр етіп аламыз, сонда $\vec{M}_2 = 0$, ал формуласынан $\Omega_2 = 0$ болады. Яғни $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ векторлары және ұршықтың осі әрбір уақыт моментінде бір жазықтықта жатады.



Сурет 44.

Бірақ $\vec{v} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$ барлық нүктелердің жылдамдықтары әрбір уақыт моментінде берілген жазықтыққа перпендикуляр. Басқаша айтқанда, ұршықтың осі дөңгелек конусты (ұршықтың бірқалыпты прецессиясы деп аталатын) сыза отырып $\vec{M}$ векторының маңында бірқалыпты айналады.

Прецессияға қоса ұршық өз осінің маңында бірқалыпты айналады. Ұршықтың өз осінен айналуының бұрыштық жылдамдығы $\vec{\Omega}$ векторының $\vec{\Omega}_3$ проекциясы болып табылады:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta \tag{45}$$

Прецессия жылдамдығы $\vec{\Omega}_{пр}$ табу үшін $\vec{\Omega}$ векторын параллелограмм ережесі бойынша z' және $\vec{M}$ құраушыларына жіктеу қажет.

$$\Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M\sin\theta}{I_1}, \tag{46}$$

болғандықтан
$$\Omega_{пр} = \frac{M}{I_1}. \tag{47}$$

Қатты дененің қозғалыс теңдеулері. Қатты дененің қозғалыс теңдеулері импульстің сақталу заңы және импульс моменті сақталу заңы сияқты механика заңдарының негізінде құрылады. Олар қатты дененің сыртқы күштердің әсерінен немесе оның ішкі құрылымының өзгеруінен қалай қозғалатынын анықтауға мүмкіндік береді. Лагранж функциясы:

$$L = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U(R), \tag{48}$$

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}. \tag{49}$$

Енді қозғалыс теңдеулерін импульс моментінің $\vec{M}$ уақыт бойынша туындысы ретінде аламыз. Ыңғайлы болу үшін санақ жүйесін, берілген уақытта дененің инерция центрі онымен салыстырғанда «тыныштықта» болатындай етіп инерциялды түрде аламыз. Сонымен қатар алынған теңдеулер жүйесі басқа да инерцияларды санақ жүйелерінде Галилейдің салыстырмалық принципі орындалады.

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\sum\left[\vec{r}\vec{P}_i\right] = \sum\left[\dot{\vec{r}}\vec{P}_i\right] + \sum\left[\vec{r}\dot{\vec{P}}_i\right]. \tag{50}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}. \tag{51}$$

Себебі
$$\vec{K} = \sum\left[\vec{r}\vec{f}_i\right] \tag{52}$$

$\left[\vec{r}\vec{f}_i\right]$ – векторы $\vec{\boldsymbol{f}}_i$ *күшінің моменті* деп аталады. Сондықтан $\vec{K}$ – денеге әсер ететін барлық күштердің моменттерінің қосындысына тең болып табылады.

Қатты дененің қозғалысын сипаттаудағы негізгі ұғымдардың бірі - айналу осьтеріне қатысты массаның таралуын сипаттайтын инерция моменті. Инерция моменті қатты дененің бұрыштық жылдамдығымен байланысты және оның бұрыштық инерциясын анықтайды. Лагранж функциясын $\vec{\Omega}$ векторының компоненттері арқылы дифференциалдасақ:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik} \cdot \Omega_k = M_i \tag{53}$$

Егер $\vec{F}$ және $\vec{K}$ векторлары өзара перпендикуляр болса (19) формуладағы $\vec{K}' = 0$ айналатын кез-келген $\vec{a}$ векторын таңдап алуға болатындықтан:

$$\vec{K} = \left[\vec{a}\vec{F}\right]. \tag{54}$$

Бір нүктесі бекітілген абсолютті қатты дене үшін Эйлердің қозғалыс теңдеулері.

Қозғалыс теңдеулері тыныштықтағы координаттар жүйесі үшін жазылған және $\vec{P}$ және $\vec{M}$ векторларының өзгерісі осындай жүйелерге қатысты алынған:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} \tag{55}$$

Енді қозғалыс теңдеулерін x', y', z' қозғалыстағы координаттар үшін жазып көреміз. $\frac{d\vec{A}}{dt}$ – кез-келген бір $\vec{A}$ векторының тыныштықтағы координаттар жүйесіне қатысты алғандағы уақыт бойынша өзгерісі деп алайық. Егер айналмалы жүйеге қатысты $\vec{A}$ векторы өзгермейтін болса, онда оның тыныштықтағы жүйеге қатысты өзгерісі тек айналуға ғана байланысты болады да:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] \tag{56}$$

Сонымен қатар

$$\delta\vec{r} = \left[\delta\vec{\phi} \cdot \vec{r}\right], \quad \delta\vec{v} = \left[\delta\vec{v} \cdot \vec{r}\right] \tag{57}$$

осы өрнектер кез келген векторлар үшін орындалатыны жоғарыда айтылған болатын. (2) өрнектің оң жағына $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ – $\vec{A}$ векторының қозғалыстағы жүйеге қатысты алынған жылдамдығының өзгерісін қосатын болсақ:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right]. \tag{58}$$

x`,y`,z` осьтері инерциясының бас осьтері арқылы өтеді дей отыра, (6) теңдеуін $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ өрнектерін пайдаланып жазамыз:

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1,$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2,$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3. \tag{59}$$

Осы теңдеулер *Эйлер теңдеулері* деп аталады. Еркін айналу кезінде $K = 0$ болады да Эйлер теңдеулері былай жазылады:

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{(I_3 - I_2)}{I_1}\Omega_2\Omega_3 = 0,$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{(I_1 - I_3)}{I_2}\Omega_3\Omega_1 = 0,$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\Omega_1\Omega_2 = 0. \tag{60}$$

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Абсолют қатты дене дегеніміз не?
2. Түйіндер сызығы деген не?
3. Қатты дененің үш өлшемді кеңістіктегі орнын сипаттау үшін қандай параметрлер қолданылады?
4. Эйлер бұрыштары дегеніміз не және олар қатты дененің бағдарын сипаттаумен қалай байланысты?
5. Лездік айналу осі дегеніміз не?
6. Бұрыштық жылдамдық дегеніміз не және ол қалай анықталады?
7. Бұрыштық жылдамдық пен проекцияларды механикадағы нақты жағдайларға немесе есептерге қалай қолдануға болады?

8. Жазық ұршық деген не?
9. Асимметриялы ұршық деген не?
10. Абсолют қатты дененің инерция тензоры неге тең?
11. Қатты дененің импульс моменті өрнегін жазыңыз неге тең?
12. Қатты дененің қозғалыс теңдеулерінің негізінде механиканың қандай заңдары жатыр?
13. Қатты дененің қозғалыс теңдеулерін шешудің негізгі әдістері қандай?
14. Қатты дененің қозғалыс теңдеулерін шешуден қандай физикалық шамаларды алуға болады?
15. Айналмалы симметриялы қатты денелер үшін қозғалыс теңдеулерінің ерекшеліктері қандай?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5